



HAL
open science

Le produit harmonique des suites

Bernard Candelpergher, Marc-Antoine Coppo

► **To cite this version:**

Bernard Candelpergher, Marc-Antoine Coppo. Le produit harmonique des suites. 2011. hal-00604393v1

HAL Id: hal-00604393

<https://univ-cotedazur.hal.science/hal-00604393v1>

Preprint submitted on 28 Jun 2011 (v1), last revised 29 Jan 2013 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le produit harmonique des suites

Bernard Candelpergher et Marc-Antoine Coppo
Université de Nice Sophia Antipolis
Laboratoire Jean Alexandre Dieudonné
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2
FRANCE

Bernard.CANDELPERGHER@unice.fr
Marc-Antoine.COPPO@unice.fr

Juin 2011

Résumé

Au moyen d'une transformation binomiale involutive, on définit dans l'espace des suites complexes un nouveau produit appelé « harmonique » en raison de ses remarquables propriétés vis à vis des sommes harmoniques. La transformation d'Euler des séries permet alors de déduire de ces propriétés d'harmonicité de nouvelles et remarquables identités.

Mathematical Subject Classification (2000) : 05A10, 05A19, 11B65, 11B83, 40-99.

Mots-clés : Transformation binomiale ; sommes harmoniques ; formule de Dilcher ; sommation d'Euler ; transformation d'Euler des séries.

1 Introduction

Dans l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ des suites à valeurs complexes, on considère la transformation D associant à toute suite $a = (a(1), a(2), a(3), \dots)$ la suite $D(a)$ définie par

$$D(a)(n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a(k+1) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

L'opérateur D est un automorphisme involutif du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, i.e.

$$a = D(D(a)).$$

Formellement, les suites a et $D(a)$ sont liées par la relation :

$$\sum_{n \geq 1} D(a)(n)z^n = - \sum_{n \geq 1} a(n) \left(\frac{z}{z-1} \right)^n.$$

La relation précédente montre en particulier que la suite harmonique $n \mapsto \frac{1}{n}$ est invariante par D . En notant $\frac{1}{N}$ cette suite, on peut donc écrire

$$D\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N}.$$

Si $D(a)D(b)$ désigne la suite obtenue par produit terme à terme des suites $D(a)$ et $D(b)$, on définit un nouveau produit dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, noté \bowtie , par la formule

$$a \bowtie b = D(D(a)D(b)).$$

Il en résulte (par involutivité de D) que $D(ab) = D(a) \bowtie D(b)$. Muni du produit \bowtie , l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ est une algèbre commutative et associative, l'élément unité étant la suite $\delta_0 = (1, 0, 0, \dots) = D(\mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est la suite $(1, 1, 1, \dots)$. Une suite a est inversible pour le produit \bowtie si et seulement si $D(a)$ est inversible pour le produit terme à terme, *i.e.* $D(a)(n) \neq 0$ pour tout n .

Une expression explicite du produit $a \bowtie b$ est donnée par la formule

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} a(k+1)b(n+1-l) \quad (n \geq 0),$$

qui permet de le calculer pour de petites valeurs de n ; on obtient ainsi

$$\begin{aligned} (a \bowtie b)(1) &= a(1)b(1), \\ (a \bowtie b)(2) &= a(2)b(1) + a(1)b(2) - a(2)b(2), \\ (a \bowtie b)(3) &= a(3)b(1) + a(1)b(3) + 2a(2)b(2) - 2a(3)b(2) - 2a(2)b(3) + a(3)b(3) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Le produit \bowtie possède des propriétés remarquables vis à vis des sommes harmoniques qui justifient sa dénomination de *produit harmonique*. On démontre en particulier (Théorème 2) la relation suivante : pour toute suite a , on a l'identité

$$\left(\frac{1}{N} \bowtie a \right) (n) = \frac{1}{n} (a(1) + a(2) + \dots + a(n)).$$

De cette propriété d'harmonicité découlent plusieurs applications remarquables. On obtient notamment (Théorème 4) la formule suivante :

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} a(n_k) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m)$$

qui est valable pour toute suite a et pour tout entier $k \geq 1$. Dans le cas où a est la suite harmonique $\frac{1}{N}$, on retrouve la classique « formule de Dilcher » (cf. [2], [3], [4]). On introduit les nombres

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} a(n_k)$$

qui apparaissent comme une généralisation naturelle des nombres harmoniques $c_n^{(k)}$ de Rota et Roman (cf. [8], [9]) : on a en effet la relation $c_n^{(k)} = S^{(k)}(\frac{1}{N})(n)$. Par transformation d'Euler, on déduit la relation

$$\sum_{n \geq 1} \frac{D(a)(n)}{n^k} z^n = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} S^{(k)}(a)(n) \left(\frac{z}{z-1}\right)^n$$

qui permet notamment, dans le cas où a est la suite $n \mapsto \frac{1}{2n-1}$, d'étendre naturellement une formule de Ramanujan pour la constante de Catalan ([1], chapitre 9, Entry 34).

2 Préliminaires : Opérateurs dans l'espace des suites

2.1 L'isomorphisme Φ

Notation. Le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ des suites $a = (a(1), a(2), a(3), \dots, a(n), \dots)$ à valeurs dans \mathbb{C} est noté \mathcal{E}^* .

Définition 1. Si $\mathbb{C}[[z]]$ désigne l'espace des séries formelles, on a un isomorphisme naturel :

$$\Phi : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]$$

défini par

$$\Phi(a)(z) = \sum_{n \geq 0} a(n+1) \frac{z^n}{n!} = a(1) + a(2)z + a(3)\frac{z^2}{2} + a(4)\frac{z^3}{6} + \dots$$

Définition 2. Les opérateurs sur \mathcal{E}^* se transforment en opérateurs sur $\mathbb{C}[[z]]$ via l'isomorphisme Φ . Plus précisément, si U désigne un opérateur sur \mathcal{E}^* , il lui correspond l'opérateur u sur $\mathbb{C}[[z]]$ défini par la relation

$$\Phi U = u \Phi \Leftrightarrow u = \Phi U \Phi^{-1}$$

qu'on appelle l'image de U .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^* & \xrightarrow{U} & \mathcal{E}^* \\ \uparrow \Phi^{-1} & & \downarrow \Phi \\ \mathbb{C}[[z]] & \xrightarrow{u} & \mathbb{C}[[z]] \end{array}$$

L'image de l'opérateur I d'identité sur \mathcal{E}^* est notée Id .

Exemple 1. a) La suite δ_k définie pour $k \geq 0$ et $n \geq 1$ par

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifie la relation

$$\Phi(\delta_k)(z) = \frac{z^k}{k!}.$$

On a $\delta_0 := (1, 0, 0, \dots)$, $\delta_1 := (0, 1, 0, \dots)$, etc. Les suites $(\delta_k)_{k \geq 0}$ forment une base naturelle de l'espace \mathcal{E}^* .

b) La suite $\mathbf{1} := (1, 1, 1, \dots)$ vérifie $\Phi(\mathbf{1})(z) = e^z$.

c) La suite $N := (1, 2, 3, \dots)$ vérifie la relation

$$\Phi(N)(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{z^n}{n!} = ze^z + e^z = (1+z)e^z.$$

d) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, La suite géométrique $\alpha^{N-1} := (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)$ vérifie la relation

$$\Phi(\alpha^{N-1})(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n z^n}{n!} = e^{\alpha z}.$$

e) La suite $\frac{1}{N} := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ vérifie la relation

$$\Phi\left(\frac{1}{N}\right)(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n+1)!} = \frac{1}{z} (e^z - 1).$$

Dans la suite de cet article, on la désigne sous le nom de *suite harmonique*.

Notation. Si a et b sont deux suites dans \mathcal{E}^* , on note ab la suite $n \mapsto a(n)b(n)$. On a en particulier : $\mathbf{1}a = a$ et $\delta_k a = a(k+1)\delta_k$ pour tout $k \geq 0$. Muni de ce produit (dit ordinaire), \mathcal{E}^* est une algèbre commutative, associative notée \mathcal{A} . L'élément unité de \mathcal{A} est la suite $\mathbf{1}$.

2.2 Les opérateurs L et R

Définition 3. L'opérateur L de décalage à gauche sur \mathcal{E}^* est défini par $L(a)(n) = a(n+1)$, i.e.

$$(a(1), a(2), a(3), \dots) \xrightarrow{L} (a(2), a(3), a(4), \dots)$$

L'image de L est l'opérateur de dérivation formelle ∂ :

$$\Phi(L(a))(z) = \partial\Phi(a)(z) = \sum_{n \geq 0} a(n+1) \frac{z^n}{n!} = a(2) + a(3)z + a(4) \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Définition 4. L'opérateur R de décalage à droite sur \mathcal{E}^* est défini par

$$R(a)(n) = \begin{cases} a(n-1) & \text{si } n > 1 \\ 0 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

i.e.

$$(a(1), a(2), a(3), \dots) \xrightarrow{R} (0, a(1), a(2), a(3), \dots)$$

L'image r de R est l'opérateur d'intégration formelle :

$$\Phi(R(a))(z) = \int_0^z \Phi(a)(t) dt = \sum_{n \geq 0} a(n+1) \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = a(1)z + a(2) \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Remarque 1. On a la relation $LR = I$, mais on notera que RL n'est pas l'identité.

Notation. La suite $R(a) = (0, a(1), a(2), \dots)$ est notée $(0, a)$.

Exemple 2.

$$R(N) = (0, N) = (0, 1, 2, 3, \dots) = N - \mathbf{1}; \Phi(N - \mathbf{1})(z) = ze^z.$$

2.3 Les opérateurs D et S

Définition 5. Soit $V : \mathcal{E}^* \rightarrow \mathbb{C}$ le morphisme d'évaluation défini par $V(a) = a(1)$, son image est l'application $v : \mathbb{C}[[z]] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $v(\Phi(a)) = V(a)$.

L'opérateur $D : \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}^*$ est défini par

$$D(a)(n) = V((I - L)^{n-1}a) = v((\text{Id} - \partial)^{n-1}\Phi(a)),$$

c'est-à-dire

$$D(a)(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} a(k) \text{ pour tout } n \geq 1,$$

ou encore

$$D(a)(n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a(k+1) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Exemple 3.

$$\begin{aligned} D(a)(1) &= a(1) \\ D(a)(2) &= a(1) - a(2) \\ D(a)(3) &= a(1) - 2a(2) + a(3). \end{aligned}$$

Proposition 1 (Relation entre T et D). Soit T la transformation binomiale définie sur $\mathcal{E} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$$T(a)(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a(k)$$

et $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^*$ la projection naturelle :

$$(a(0), a(1), a(2), a(3), \dots) \xrightarrow{\pi} (a(1), a(2), a(3), \dots),$$

on a la relation

$$D\left(\frac{1}{N}\pi(a)\right) = a(0)\frac{1}{N} - \frac{1}{N}\pi(T(a)). \quad (1)$$

Démonstration. On a pour $n \geq 1$,

$$nD\left(\frac{1}{N}\pi(a)\right)(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \frac{n}{k} a(k) = - \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} a(k) = -T(a)(n) + a(0).$$

□

Proposition 2. On a la relation

$$\Phi(D(a))(z) = e^z \Phi(a)(-z), \quad (2)$$

autrement dit, l'image d de l'opérateur D est telle que

$$d(f)(z) = e^z f(-z) \quad \text{pour tout } f \in \mathbb{C}[[z]]$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} e^z \Phi(a)(-z) &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \sum_{k \geq 0} a(k+1) (-1)^k \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a(k+1) \frac{z^n}{n!} = \Phi(D(a))(z). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1. L'opérateur D est un automorphisme involutif *i.e.* $D = D^{-1}$.

Démonstration. Pour montrer que $D = D^{-1}$, il suffit de montrer que $d = d^{-1}$. On a

$$d(f) = g \Leftrightarrow e^z f(-z) = g(z) \Leftrightarrow f(-z) = e^{-z} g(z) \Leftrightarrow f(z) = e^z g(-z) \Leftrightarrow f = d(g).$$

□

Exemple 4. a) $D(\mathbf{1}) = \delta_0$, $D(N) = \delta_0 - \delta_1$, $D(\delta_1) = \mathbf{1} - N$.

b) On a vu que $\Phi(\alpha^{N-1}) = e^{\alpha z}$. Il en résulte par (2) que $D(\alpha^{N-1}) = (1 - \alpha)^{N-1}$. En particulier la suite $(\frac{1}{2})^{N-1}$ est invariante par D .

c) On a vu que $\Phi(\frac{1}{N}) = \frac{1}{z}(e^z - 1)$. Il en résulte par (2) que la suite harmonique est invariante par D :

$$D\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N}.$$

Proposition 3. Pour toute suite a ,

$$DL(a) = (I - L)D(a) \quad (3)$$

Démonstration. On a

$$\Phi(DL(a))(z) = e^z \Phi(L(a))(-z) = e^z \partial \Phi(a)(-z) = e^z \Phi(a)(-z) - \partial(e^z \Phi(a)(-z)),$$

d'où $DL = D - LD = (I - L)D$ et $DL^{p+1} = DL^p L = (I - L)^p DL = (I - L)^{p+1} D$. \square

Définition 6. L'opérateur de sommation $S : \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}^*$ est défini par

$$S(a)(n) = \sum_{k=1}^n a(k).$$

Exemple 5. 1) $S(\delta_0) = \mathbf{1}, S(\mathbf{1}) = N$.

2) $S(\alpha^{N-1}) = \frac{1}{1-\alpha}(\mathbf{1} - \alpha^N)$ pour $\alpha \neq 1$. En particulier,

$$S((-1)^{N-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + (-1)^{N-1}) = (1, 0, 1, 0, \dots)$$

Proposition 4. L'opérateur S est un automorphisme d'inverse $S^{-1} = I - R$.

Démonstration. On a

$$b(n) = S(a)(n) \Leftrightarrow a(n) = b(n) - b(n-1) \text{ pour } n > 1 \text{ et } a(1) = b(1).$$

\square

Notation. On pose $H := S(\frac{1}{N})$, $O := S(\frac{1}{2N-1})$, et pour $k \geq 2$, $H^{(k)} := S(\frac{1}{N^k})$ et $O^{(k)} := S(\frac{1}{(2N-1)^k})$ avec :

$$\frac{1}{N^k} := \underbrace{\frac{1}{N} \cdots \frac{1}{N}}_k \quad \text{et} \quad \frac{1}{(2N-1)^k} := \underbrace{\frac{1}{2N-1} \cdots \frac{1}{2N-1}}_k.$$

Pour $n \geq 1$, on a donc

$$H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad O(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}, \quad H^{(2)}(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad O^{(2)}(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Exemple 6. Les relations

$$\sum_{k=1}^n H(k) = (n+1)H(n) - n$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{H(k)}{k} = \frac{1}{2}(H(n))^2 + \frac{1}{2}H^{(2)}(n),$$

se démontrent facilement par récurrence ; elle se traduisent par :

$$S(H) = (N+1)H - N$$

et

$$S\left(\frac{1}{N}H\right) = \frac{1}{2}(H^2 + H^{(2)}).$$

Proposition 5. On a la relation

$$\Phi(S(a))(z) = \Phi(a)(z) - e^z \int_0^{-z} e^t \Phi(a)(-t) dt, \quad (4)$$

Autrement dit, l'image s de S est l'opérateur $\text{Id} - drd$.

Démonstration. On a la relation $(L-I)S = L$ qui se traduit par $(\partial - \text{Id})\Phi(S(a)) = \partial\Phi(a)$. En résolvant l'équation différentielle $(\partial - \text{Id})\Phi(S(a)) = \partial\Phi(a)$, on obtient

$$\Phi(S(a))(z) = \Phi(a)(z) + e^z \int_0^z e^{-t} \Phi(a)(t) dt = \Phi(a)(z) - e^z \int_0^{-z} e^t \Phi(a)(-t) dt$$

□

Proposition 6. Pour tout entier naturel p , l'automorphisme DS^p est involutif. En particulier :

$$DS = (DS)^{-1} = S^{-1}D = (I - R)D.$$

Démonstration. On a vu que l'image s de S est l'opérateur $\text{Id} - drd$. On en déduit que

$$S = I - DRD.$$

D'où $DS = D - RD = (I - R)D = S^{-1}D = (DS)^{-1}$. Pour $p \geq 1$, on écrit $DS^{p+1} = DS^p S = S^{-p} DS = S^{-p-1} D$ i.e.

$$DS^p = S^{-p} D = (DS^p)^{-1}$$

□

Exemple 7. Comme $a = \frac{1}{N}$ est invariante par D , on en déduit que

$$D(H) = (I - R)\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} + \left(0, -\frac{1}{N}\right) = \delta_0 + \left(0, -\frac{1}{N(N+1)}\right),$$

c'est à dire

$$D(H)(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n(n+1)} & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Proposition 7. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a la relation

$$D\left(\frac{1}{N}S(a)\right) = \frac{1}{N}D(a). \quad (5)$$

Démonstration. Comme $S^{-1} = I - R$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(S^{-1}(a))(z) &= \Phi(a)(z) - \int_0^z \Phi(a)(t) dt = \Phi(a)(z) - z \sum_{n \geq 0} \frac{a(n+1)}{n+1} \frac{z^n}{n!} \\ &= \Phi(a)(z) - z\Phi\left(\frac{1}{N}a\right) \end{aligned}$$

En remplaçant a par $S(a)$ dans la relation précédente, on obtient alors l'égalité

$$\Phi\left(\frac{1}{N}S(a)\right) = \frac{\Phi(S(a)) - \Phi(a)}{z}.$$

D'après la Proposition 2, on a donc

$$\Phi\left(\frac{1}{N}S(a)\right) = -\frac{e^z}{z} \int_0^{-z} e^t \Phi(a)(-t) dt.$$

D'où

$$\Phi\left(D\left(\frac{1}{N}S(a)\right)\right) = \frac{1}{z} \int_0^z e^t \Phi(a)(-t) dt = \frac{1}{z} \int_0^z \Phi(D(a))(t) dt = \Phi\left(\frac{1}{N}D(a)\right).$$

□

Exemple 8.

$$D\left(\frac{1}{N}H\right) = \frac{1}{N}D\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2}$$

d'où aussi

$$D\left(\frac{1}{N}H^{(2)}\right) = \frac{1}{N}D\left(\frac{1}{N^2}\right) = \frac{1}{N^2}H.$$

2.4 Formule de Vandermonde

Notation. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $(\alpha)_0 = 1$ et $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$ pour $n \geq 1$. On note $(\alpha)_N$ la suite $n \mapsto (\alpha)_n$. On pose $N! := (1)_N$.

Proposition 8. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour $\beta \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$ On a la relation

$$D\left(\frac{1}{N} \frac{(\alpha)_N}{(\beta)_N}\right) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N} \frac{(\beta - \alpha)_N}{(\beta)_N} \quad (6)$$

En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$

$$D\left(\frac{(N-1)!}{(\alpha)_N}\right) = \frac{1}{N} - \frac{(\alpha-1)_N}{N(\alpha)_N} = \frac{1}{N + \alpha - 1} \quad (7)$$

Démonstration. D'après la formule de Vandermonde (cf. Henrici, p. 25), on peut écrire

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} = \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha)_k (-n)_k}{(\beta)_k k!} = \frac{(\beta - \alpha)_n}{(\beta)_n}$$

La relation (6) s'en déduit alors par (1). \square

Remarque 2. Notons que la formule de Vandermonde peut s'écrire plus simplement

$$D\left(\frac{(\alpha)_{N-1}}{(\beta)_{N-1}}\right) = \frac{(\beta - \alpha)_{N-1}}{(\beta)_{N-1}} \quad (8)$$

Exemple 9. En appliquant (7) avec $\alpha = \frac{1}{2}$, il vient

$$D\left(\frac{2^{2x}(N!)^2}{N(2N)!}\right) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N} \frac{-1/2}{N-1/2} = \frac{2}{2N-1}$$

En posant

$$\binom{2N}{N} := \frac{(2N)!}{(N!)^2},$$

on en déduit

$$D\left(\frac{1}{2N-1}\right) = \frac{1}{N} \frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}} \quad (9)$$

d'où aussi par (5) :

$$D\left(\frac{1}{N} O\right) = \frac{1}{N} D\left(\frac{1}{2N-1}\right) = \frac{1}{N^2} \frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}.$$

3 Le produit harmonique

3.1 L'algèbre $\mathcal{H} = (\mathcal{E}^*, \bowtie)$

On rappelle que \mathcal{A} désigne l'algèbre (\mathcal{E}^*, \cdot) munie du produit ordinaire des suites (*i.e.* terme à terme).

Définition 7. On définit le produit harmonique $a \bowtie b$ de deux suites a et b dans \mathcal{E}^* par

$$a \bowtie b := D(D(a)D(b))$$

Comme $D = D^{-1}$, on déduit immédiatement de la définition précédentes les deux relations fondamentales suivantes :

$$D(a \bowtie b) = D(a)D(b) \tag{10}$$

et

$$D(ab) = D(a) \bowtie D(b). \tag{11}$$

Exemple 10. 1) On a $\mathbf{1} \bowtie a = a(1)\mathbf{1}$, car

$$D(\mathbf{1} \bowtie a) = D(\mathbf{1})D(a) = \delta_0 D(a) = D(a)(1)\delta_0 = a(1)\delta_0 = a(1)D(\mathbf{1}).$$

2) On a $N \bowtie a = a(2)\mathbf{1} + (a(1) - a(2))N$, car

$$D(N)D(a) = (\delta_0 - \delta_1)D(a) = D(a)(1)\delta_0 - D(a)(2)\delta_1 = a(1)D(N) + a(2)D(1 - N).$$

3) On a $\alpha^{N-1} \bowtie \beta^{N-1} = (\alpha + \beta - \alpha\beta)^{N-1}$, car

$$\begin{aligned} D(\alpha^{N-1} \bowtie \beta^{N-1}) &= (1 - \alpha)^{N-1}(1 - \beta)^{N-1} \\ &= (1 - (\alpha + \beta - \alpha\beta))^{N-1} \\ &= D((\alpha + \beta - \alpha\beta)^{N-1}). \end{aligned}$$

4) Par la formule de Vandermonde (8), on a $\frac{(\gamma - \beta)_{N-1}}{(\gamma)_{N-1}} \bowtie \frac{(\beta - \alpha)_{N-1}}{(\beta)_{N-1}} = \frac{(\gamma - \alpha)_{N-1}}{(\gamma)_{N-1}}$.

Proposition 9. L'espace (\mathcal{E}^*, \bowtie) est une \mathbb{C} -algèbre commutative, associative et unitaire notée \mathcal{H} , isomorphe à l'algèbre \mathcal{A} . L'élément unité dans \mathcal{H} est la suite δ_0 .

Démonstration. La bilinéarité du produit \bowtie résulte de la linéarité de D et de la bilinéarité du produit ordinaire. De plus, il résulte immédiatement des propriétés (10) et (11) que l'opérateur D réalise un isomorphisme d'algèbre entre les \mathbb{C} -algèbres \mathcal{A} et \mathcal{H} .

Il en résulte que \mathcal{H} hérite des propriétés d'associativité et de commutativité de \mathcal{A} . En particulier, l'élément unité de \mathcal{H} est l'image de $\mathbf{1}$ par D , c'est à dire δ_0 . \square

Remarque 3. L'algèbre \mathcal{H} contient des diviseurs de zéro. On a par exemple

$$\mathbf{1} \bowtie \delta_1 = 0$$

Corollaire 2. Une suite a est inversible dans \mathcal{H} si et seulement si la suite $D(a)$ est inversible dans \mathcal{A} (i.e. $D(a)(n) \neq 0$ pour tout n). Dans ce cas, l'inverse harmonique de a est donné par la formule

$$a^{\bowtie(-1)} = D\left(\frac{1}{D(a)}\right). \quad (12)$$

Démonstration.

$$a \bowtie b = \delta_0 \Leftrightarrow D(a)D(b) = D(\delta_0) = \mathbf{1} \Leftrightarrow D(b) = \frac{1}{D(a)}.$$

□

Exemple 11. a) Les suites $\mathbf{1}$ et N ne sont pas inversibles dans \mathcal{H} .

b)

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie(-1)} = D(N) = \delta_0 - \delta_1.$$

c)

$$(\alpha^{N-1})^{\bowtie(-1)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{N-1}$$

3.2 Puissances harmoniques k -ièmes

Définition 8. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on définit pour tout entier $k \geq 0$, la puissance harmonique k -ième de a notée $a^{\bowtie k}$ par

$$a^{\bowtie 0} = \delta_0 \quad \text{et} \quad a^{\bowtie(k+1)} = a^{\bowtie k} \bowtie a.$$

Par récurrence sur k , on en déduit immédiatement la formule suivante :

$$a^{\bowtie k} = D(\underbrace{D(a) \dots D(a)}_k) = D\left((D(a))^k\right).$$

En particulier, si a est invariante par D , alors $a^{\bowtie k} = D(a^k)$.

Exemple 12. a)

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} = D\left(\frac{1}{N^k}\right)$$

b)

$$N^{\bowtie k} = D((\delta_0 - \delta_1)^k) = \mathbf{1} + (-1)^k(1 - N) = \begin{cases} N & \text{si } k \text{ impair} \\ 2 - N & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

c)

$$(\delta_1)^{\bowtie k} = \sum_{n=0}^k n! S(k, n) \delta_n$$

où les $S(k, n)$ sont les nombres de Stirling de deuxième espèce. En effet :

$$(\delta_1)^{\bowtie k} = D((-1)^k (N-1)^k)$$

et

$$D((-1)^k (N-1)^k)(n+1) = \sum_{m=0}^n (-1)^{m-k} \binom{n}{m} m^k = n! S(k, n)$$

3.3 Image de \mathcal{H} dans $\mathbb{C}[[z]]$

Théorème 1. *Pour toutes suites a et b ,*

$$\Phi(a \bowtie b)(z) = \sum_{n \geq 0} (v_x \otimes v_y) (\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y)^n (\Phi(a) \otimes \Phi(b)) \frac{z^n}{n!} \quad (13)$$

avec $\Phi(a) \otimes \Phi(b)(x, y) := \Phi(a)(x)\Phi(b)(y)$. Il en résulte que pour tout entier $n \geq 0$,

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l} a(k+1)b(l+1)$$

avec

$$(X + Y - XY)^n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l} X^k Y^l.$$

Démonstration. On a

$$\Phi(a \bowtie b)(z) = \Phi(D(D(a)D(b)))(z) = e^z \Phi(D(a)D(b))(-z)$$

et

$$D(a)(n+1) = v((\text{Id} - \partial)^n \Phi(a)) \quad \text{avec} \quad v(\Phi(a)) = \Phi(a)(0) = a(1).$$

D'où

$$\begin{aligned} (D(a)D(b))(n+1) &= (v_x \otimes v_y) [(\text{Id} - \partial_x)(\text{Id} - \partial_y)]^n (\Phi(a) \otimes \Phi(b))(x, y) \\ &= (v_x \otimes v_y) [(\text{Id} - (\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y))]^n (\Phi(a) \otimes \Phi(b))(x, y). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \Phi(D(a)D(b))(-z) &= (v_x \otimes v_y) \sum_{n \geq 0} [(\text{Id} - (\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y))]^n (\Phi(a) \otimes \Phi(b)) (-1)^n \frac{z^n}{n!} \\ &= e^{-z} (v_x \otimes v_y) e^{(\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y)z} (\Phi(a) \otimes \Phi(b)) \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\Phi(a \times b)(z) &= (v_x \otimes v_y) e^{(\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y)z} \Phi(a) \otimes \Phi(b) \\ &= \sum_{n \geq 0} (v_x \otimes v_y) (\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y)^n (\Phi(a) \otimes \Phi(b)) \frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

Par identification du terme général, on en déduit que

$$\begin{aligned}(a \times b)(n+1) &= (v_x \otimes v_y) (\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y)^n (\Phi(a) \otimes \Phi(b)) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} (v_x \otimes v_y) C_n^{k,l} \partial_x^k \Phi(a) \partial_y^l \Phi(b) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l} a(k+1) b(l+1)\end{aligned}$$

avec

$$(X + Y - XY)^n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l} X^k Y^l.$$

□

Corollaire 3 (Expression explicite du produit harmonique).

$$(a \times b)(n+1) = \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} a(k+1) b(n+1-l) \quad (n \geq 0),$$

Démonstration. En développant $(X + Y - XY)^n$ par la formule du binôme et en identifiant le coefficient de $X^k Y^l$, on vérifie que

$$C_n^{k,l} = (-1)^{k+l-n} \frac{n!}{(n-k)!(n-l)!(l+k-n)!} \text{ si } n \leq k+l, \text{ et } C_n^{k,l} = 0 \text{ sinon.}$$

d'où

$$\begin{aligned}(a \times b)(n+1) &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l} a(k+1) b(l+1) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n \\ k+l \geq n}} (-1)^{k+l-n} \frac{n!}{(n-k)!(n-l)!(l+k-n)!} a(k+1) b(l+1) \\ &= \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} a(k+1) b(n-l+1).\end{aligned}$$

□

Corollaire 4. On a la relation

$$\Phi(a \rtimes b)(z) = v_y (\Phi(a)[(\text{Id} - \partial_y)z] \Phi(b)[y + z]) \quad (14)$$

Il en résulte que

$$\Phi(\alpha^{N-1} \rtimes a)(z) = e^{\alpha z} \Phi(a)((1 - \alpha)z), \quad (15)$$

ce qui se traduit par

$$(\alpha^{N-1} \rtimes a)(n+1) = \alpha^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k a(k+1) \quad (16)$$

Démonstration. On a

$$e^{(\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y)z} \Phi(a) = e^{\partial_x(I - \partial_y)z} \Phi(a) e^{(\partial_y)z} = \Phi(a)[x + (I - \partial_y)z] e^{(\partial_y)z}$$

donc

$$\begin{aligned} \Phi(a \rtimes b)(z) &= (v_x \otimes v_y) \Phi(a)[x + (I - \partial_y)z] e^{(\partial_y)z} \Phi(b) \\ &= (v_x \otimes v_y) \Phi(a)[x + (I - \partial_y)z] \Phi(b)[y + z] \\ &= v_y (\Phi(a)[(I - \partial_y)z] \Phi(b)[y + z]). \end{aligned}$$

On a vu que $\Phi(\alpha^{x-1})(z) = e^{\alpha z}$ donc

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha^{x-1} \rtimes a)(z) &= v_y (\Phi(\alpha^{x-1})[(\text{Id} - \partial_y)z] \Phi(a)[y + z]) \\ &= v_y \left(e^{\alpha(\text{Id} - \partial_y)z} \Phi(a)[y + z] \right) \\ &= e^{\alpha z} v_y \left(e^{-\alpha z \partial_y} \Phi(a)[y + z] \right) \\ &= e^{\alpha z} \sum_{n \geq 0} \frac{(-\alpha z)^n}{n!} \partial^n \Phi(a)(z) \\ &= e^{\alpha z} \Phi(a)((1 - \alpha)z). \end{aligned}$$

□

Exemple 13.

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \rtimes a\right)(n+1) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a(k+1)$$

Proposition 10 (Caractérisation des suites invariantes par D). Une suite $a \in \mathcal{E}^*$ est invariante par D si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \rtimes b$$

où $b \in \mathcal{E}^*$ est telle que $b(2k) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Démonstration. On a

$$D(a) = a \Leftrightarrow \Phi(D(a)) = \Phi(a) \Leftrightarrow e^z \Phi(a)(-z) = \Phi(a)(z).$$

Posons $\phi(z) = e^{-\frac{z}{2}} \Phi(a(z))$. On a donc $D(a) = a \Leftrightarrow \phi(z) = \phi(-z)$. Dans ce cas, ϕ peut toujours s'écrire

$$\phi(z) = \Phi(b)\left(\frac{z}{2}\right) \text{ avec } b(2n) = 0 \text{ pour } n \geq 1,$$

et on a alors

$$\Phi(a(z)) = e^{\frac{z}{2}} \phi(z) = e^{\frac{z}{2}} \Phi(b)\left(\frac{z}{2}\right) = \Phi\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie b\right)(z).$$

□

Exemple 14. a) La suite harmonique s'écrit

$$\frac{1}{N} = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie b$$

$$\text{avec } b = \frac{1}{N} \bowtie (-1)^{N-1} = \left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots\right)$$

b) La suite

$$a = \frac{1}{2}(\delta_0 + \mathbf{1}) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$$

est invariante par D . Elle s'écrit

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie (1, 0, 1, 0, \dots)$$

Remarque 4. On comparera le critère d'invariance précédent avec celui donné par Sun (cf. [10] Corollary 3.3 (a)).

Remarque 5 (Somme d'Euler des séries). Pour $q > 0$, on définit la suite $a^{(q)}$ par

$$a^{(q)}(n+1) = \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} a(k+1) \quad (n \geq 0).$$

D'après Hardy, on dit que la série $\sum_{n \geq 1} a(n)$ est (E, q) sommable si la série $\sum_{n \geq 1} a^{(q)}(n)$ converge et on pose

$$\sum_{n \geq 1}^{(E, q)} a(n) := \frac{1}{q+1} \sum_{n=0}^{\infty} a^{(q)}(n+1)$$

D'après (15), on a l'interprétation suivante de $a^{(q)}$:

$$a^{(q)} = \alpha^{N-1} \bowtie a \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{q}{q+1}.$$

On obtient ainsi une reformulation du théorème de Hardy (cf. [5] p. 178-179) :

Théorème. Si la série $\sum_{n \geq 1} a(n)$ est convergente alors elle est (E, q) sommable et on a

$$\frac{1}{q+1} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{q+1}\right)^{N-1} \bowtie a(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n).$$

3.4 Harmonicité

Théorème 2. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a la relation

$$\frac{1}{N} \bowtie a = \frac{1}{N} S(a) \quad (17)$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $D(\frac{1}{N} \bowtie a) = D(\frac{1}{N} S(a))$. Or, par (5), on a $D(\frac{1}{N} S(a)) = \frac{1}{N} D(a) = D(\frac{1}{N}) D(a) = D(\frac{1}{N} \bowtie a)$. \square

Corollaire 5. Pour tout entier $k \geq 1$,

$$D\left(\frac{1}{N^{k+1}}\right) = \frac{1}{N} S D\left(\frac{1}{N^k}\right)$$

Démonstration.

$$D\left(\frac{1}{N^{k+1}}\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie(k+1)} = \frac{1}{N} \bowtie \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} = \frac{1}{N} S\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k}\right) = \frac{1}{N} S D\left(\frac{1}{N^k}\right).$$

\square

Exemple 15.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \bowtie \frac{1}{N} &= D\left(\frac{1}{N^2}\right) = \frac{1}{N} H \\ \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie 3} &= D\left(\frac{1}{N^3}\right) = \frac{1}{N} S\left(\frac{1}{N} H\right) = \frac{1}{2N} (H^2 + H^{(2)}) \end{aligned}$$

Notation. Pour tout $p \in \mathbb{R} - \{-1, -2, \dots\}$, on note $p! = \Gamma(p+1)$; on note $\Gamma(N+p)$ la suite $n \mapsto \Gamma(n+p)$. On pose

$$(N)_p := \frac{\Gamma(N+p)}{\Gamma(N)}.$$

Pour p entier naturel, on a $(N)_0 = \mathbf{1}$, et pour $p \geq 1$

$$(N)_p = N(N+1) \cdots (N+p-1).$$

Le théorème 2 se généralise alors de la manière suivante :

Théorème 3. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et tout réel $p \neq -1, -2, -3, \dots$, on a la relation

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie a = \frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{(N)_p}{p!} a\right) \quad (18)$$

ce qui se traduit, pour p entier ≥ 1 , par

$$\left(\frac{p!}{N(N+1) \cdots (N+p)} \bowtie a\right)(n) = \frac{p!}{n(n+1) \cdots (n+p)} \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1) \cdots (k+p-1)}{p!} a(k)$$

Démonstration. En appliquant (7) avec $p = \alpha - 1$, on obtient

$$D\left(\frac{1}{N+p}\right) = \frac{(N-1)!}{(p+1)_N} = \frac{\Gamma(N)\Gamma(p+1)}{\Gamma(N+p+1)} = \frac{p!}{(N)_{p+1}}$$

par conséquent,

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \times a = D\left(\frac{1}{N+p}D(a)\right)$$

Posons

$$f_{p+1}(z) = \Phi\left(D\left(\frac{1}{N+p}D(a)\right)(z)\right)$$

On a

$$f_{p+1}(z) = e^z \sum_{n \geq 0} (D(a))(n+1) \frac{1}{n+1+p} \frac{(-z)^n}{n!}$$

et donc

$$e^{-z} z^{p+1} f_{p+1}(z) = \sum (D(a))(n+1) (-1)^n \frac{1}{n+1+p} \frac{z^{n+p+1}}{n!}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} e^{-z} z^{p+1} f_{p+1}(z) &= \int_0^z t^p \sum (D(a))(n+1) (-1)^n \frac{t^n}{n!} dt \\ &= \int_0^z e^{-t} t^p \sum a(n+1) \frac{t^n}{n!} dt \\ &= \int_0^z e^{-t} t^p \Phi(a)(t) dt \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f_{p+1}(z) = e^z \frac{1}{z^{p+1}} \int_0^z e^{-t} t^p \Phi(a)(t) dt.$$

Par le changement de variable $u = tz$ on a aussi

$$\begin{aligned} f_{p+1}(z) &= \int_0^1 e^{z(1-u)} u^p \Phi(a)(uz) du \\ &= \sum_{k,l} \frac{z^k}{k!} \frac{z^l}{l!} a(k+1) \int_0^1 (1-u)^l u^{p+k} du \\ &= \sum_{k,l} \frac{z^k}{k!} \frac{z^l}{l!} a(k+1) \frac{l!(p+k)!}{(p+k+l+1)!} \\ &= \sum_n \frac{z^n}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} a(k+1) \frac{l!(p+k)!}{(p+k+l+1)!} \\ &= \sum_n \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{(p+k)!}{(p+n+1)!} a(k+1) \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{(p+k)!}{(p+n+1)!} a(k+1) = \frac{1}{(n+1) \dots (n+1+p)} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \dots (k+p-1) a(k)$$

ce qui montre que

$$\Phi\left(\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie a\right) = \Phi\left(\frac{1}{(N)_{p+1}} S((N)_p a)\right) = \Phi\left(\frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{(N)_p}{p!} a\right)\right)$$

□

Exemple 16. Pour $p = 1$, on a

$$\frac{1}{N(N+1)} \bowtie a = \frac{1}{N(N+1)} S(Na)$$

c'est à dire

$$\left(\frac{1}{N(N+1)} \bowtie a\right)(n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ka(k)$$

On en déduit que

$$\left(\frac{1}{N+1} \bowtie a\right)(n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (n+1-k)a(k).$$

Corollaire 6. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et pour tout entier $p \geq 0$,

$$D\left(\frac{1}{(N)_{p+1}} S(a)\right) = \frac{1}{(N)_{p+1}} S^p(D(a)) \quad (19)$$

Démonstration. Par récurrence sur p . Pour $p = 0$, c'est la formule (5). En écrivant $(N)_{p+1} = (N+p)(N)_p$, on obtient

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{(N)_{p+1}} S(a)\right) &= D\left(\frac{1}{N+p}\right) \bowtie D\left(\frac{1}{(N)_p} S(a)\right) \\ &= \frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie \frac{1}{(N)_p} S^{p-1}(D(a)) \\ &= \frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{(N)_p}{p!} \frac{1}{(N)_p} S^{p-1}(D(a))\right) \\ &= \frac{1}{(N)_{p+1}} S^p(D(a)). \end{aligned}$$

□

Exemple 17. a) $a = \frac{1}{N}$ et $p = 1$:

$$D\left(\frac{H}{N(N+1)}\right) = \frac{H}{N(N+1)}.$$

b) $a = \frac{1}{N}$ et $p = 2$:

$$D\left(\frac{H}{N(N+1)(N+2)}\right) = \frac{S(H)}{N(N+1)(N+2)} = \frac{H}{N(N+2)} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}.$$

c) $a = \frac{1}{N^2}$ et $p = 1$:

$$D\left(\frac{H^{(2)}}{N(N+1)}\right) = \frac{1}{N(N+1)}S\left(\frac{1}{N}H\right) = \frac{H^2}{2N(N+1)} + \frac{H^{(2)}}{2N(N+1)}.$$

Corollaire 7. Pour tout réel $p \neq -1, -2, \dots$,

$$D\left(\frac{1}{(N+p)^2}\right) = \frac{p!}{(N)_{p+1}} \asymp \frac{p!}{(N)_{p+1}} = \frac{p!}{(N)_{p+1}}S\left(\frac{1}{N+p}\right).$$

Démonstration. Par (18),

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \asymp \frac{p!}{(N)_{p+1}} = \frac{p!}{(N)_{p+1}}S\left(\frac{(N)_p}{p!} \frac{p!}{(N)_{p+1}}\right) = \frac{p!}{(N)_{p+1}}S\left(\frac{1}{N+p}\right).$$

□

Exemple 18. a) $p = 1$,

$$D\left(\frac{1}{(N+1)^2}\right) = \frac{1}{N(N+1)}S\left(\frac{1}{N+1}\right) = \frac{H}{N(N+1)} - \frac{1}{(N+1)^2}$$

ce qui peut se réécrire :

$$\frac{H}{N(N+1)} = \frac{1}{(N+1)^2} + D\left(\frac{1}{(N+1)^2}\right).$$

b) $p = -\frac{1}{2}$

$$D\left(\frac{1}{(N-\frac{1}{2})^2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(N)_{\frac{1}{2}}}S\left(\frac{1}{N-\frac{1}{2}}\right)$$

ce qui peut se réécrire :

$$D\left(\frac{1}{(2N-1)^2}\right) = \frac{2^{2N-1}}{N\binom{2N}{N}}O$$

c'est à dire (cf. [1] p. 293)

$$D\left(\frac{1}{(2N-1)^2}\right)(n) = \frac{2^{2n-1}}{n\binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}.$$

Remarque 6. Plus généralement, on peut montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$D\left(\frac{1}{(N+p)^{k+1}}\right) = \frac{N!}{N(p+1)_N} P_k(S_p^{(1)}, \dots, S_p^{(k)})$$

avec pour $1 \leq m \leq k$ et $n \geq 1$,

$$S_p^{(m)}(n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(p+j)^m}$$

et où les $P_k(X_1, \dots, X_k)$ sont les polynomes de Bell modifiés (cf. [3], [4]) définis par la fonction génératrice

$$\exp\left(\sum_{m \geq 1} X_m \frac{x^m}{m}\right) = \sum_{k \geq 0} P_k(X_1, \dots, X_k) x^k.$$

En particulier, pour $p = 0$,

$$D\left(\frac{1}{N^{k+1}}\right) = \frac{1}{N} P_k(H, H^{(2)}, \dots, H^{(k)})$$

et pour $p = -\frac{1}{2}$,

$$D\left(\frac{1}{(2N-1)^{k+1}}\right) = \frac{2^{2N-1}}{N \binom{2N}{N}} P_k(O, O^{(2)}, \dots, O^{(k)}).$$

4 Les sommes harmoniques

On rappelle la propriété d'harmonicité (17) : $\frac{1}{N} \bowtie a = \frac{1}{N} S(a)$. Cette propriété justifie la généralisation suivante.

Définition 9. Soit une suite $a \in \mathcal{E}^*$, on définit pour tout entier naturel k , la *somme harmonique k -ième* de a notée $S^{(k)}(a)$ par la formule

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a = \frac{1}{N} S^{(k)}(a) \quad (20)$$

Exemple 19.

$$D\left(\frac{1}{N^{k+1}}\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie(k+1)} = \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie \frac{1}{N} = \frac{1}{N} S^{(k)}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (21)$$

D'où

$$S^{(k)}\left(\frac{1}{N}\right) = N D\left(\frac{1}{N^{k+1}}\right)$$

i.e.

$$S^{(k)}\left(\frac{1}{N}\right)(n) = n D\left(\frac{1}{N^{k+1}}\right)(n) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k}.$$

Plus généralement,

Proposition 11. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et pour $k \geq 1$, on a l'identité

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m). \quad (22)$$

Démonstration. Par définition de la somme harmonique k -ième,

$$\frac{1}{N} S^{(k)}(a) = \left(\frac{1}{N} \right)^{\boxtimes k} \boxtimes a = D\left(\frac{1}{N^k} D(a)\right)$$

d'où

$$S^{(k)}(a) = ND\left(\frac{1}{N^k} D(a)\right)$$

ce qui se traduit par

$$S^{(k)}(a)(n) = nD\left(\frac{1}{N^k} D(a)\right)(n) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m).$$

□

On va à présent donner une autre expression des sommes harmoniques.

Proposition 12. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a $S^{(0)}(a)(n) = na(n)$ et la relation de récurrence :

$$S^{(k+1)}(a)(n) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} S^{(k)}(a)(m). \quad (23)$$

Il en résulte que $S^{(1)}(a) = S(a)$, et pour $k \geq 2$,

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} a(n_k). \quad (24)$$

Démonstration. Par (17), on peut écrire

$$\frac{1}{N} S^{(k+1)}(a) := \left(\frac{1}{N} \right)^{\boxtimes(k+1)} \boxtimes a = \frac{1}{N} \boxtimes \left(\left(\frac{1}{N} \right)^{\boxtimes k} \boxtimes a \right) = \frac{1}{N} S \left(\left(\frac{1}{N} \right)^{\boxtimes k} \boxtimes a \right).$$

On en déduit la relation de récurrence

$$S^{(k+1)}(a) = S \left(\left(\frac{1}{N} \right)^{\boxtimes k} \boxtimes a \right) = S \left(\frac{1}{N} S^{(k)}(a) \right),$$

qui se traduit par (23). La formule (24) s'en déduit aussitôt par récurrence. □

Exemple 20.

$$S^{(0)}\left(\frac{1}{N}\right) = \mathbf{1} \quad ; \quad S^{(1)}\left(\frac{1}{N}\right) = H \quad ; \quad S^{(2)}\left(\frac{1}{N}\right) = S\left(\frac{1}{N}H\right) = \frac{1}{2}(H^2 + H^{(2)})$$

Théorème 4. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, et pour $k \geq 2$, on a l'identité

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} a(n_k) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m). \quad (25)$$

Démonstration. La formule (25) résulte des formules (22) et (24) par identification \square

Corollaire 8 (Formule de Dilcher généralisée). Pour $k \geq 1$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_k} = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k},$$

et pour $q \geq 1$ et $k \geq 1$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} \frac{1}{n_k^{q+1}} = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k} \sum_{m \geq m_1 \geq \dots \geq m_q \geq 1} \frac{1}{m_1 \dots m_q}. \quad (26)$$

Démonstration. On applique successivement (25) à la suite $a = \frac{1}{N}$ (on a $D(a) = a$), puis à la suite $a = \frac{1}{N^{q+1}}$ avec $q \geq 1$, on a $D(a) = \frac{1}{N} S^{(q)}\left(\frac{1}{N}\right)$. \square

Exemple 21. a) $a = \frac{1}{N^2}$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} \frac{1}{n_k^2} = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{H(m)}{m^k}$$

b) $a = \frac{1}{2N-1}$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} \frac{1}{2n_k - 1} = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{2^{2m-1}}{m^k \binom{2m}{m}}$$

c) $a = \frac{1}{(2N-1)^2}$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} \frac{1}{(2n_k - 1)^2} = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{2^{2m-1} O(m)}{m^k \binom{2m}{m}}$$

5 La Transformation d'Euler

5.1 Transformation d'Euler formelle dans $\mathbb{C}[[z]]$

Théorème 5. Soit $a \in \mathcal{E}^*$, on a la relation dans $\mathbb{C}[[z]]$

$$\sum_{n \geq 1} D(a)(n)z^n = - \sum_{n \geq 1} a(n) \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \quad (27)$$

Démonstration. Par définition de $D(a)$, on a

$$\sum_{n \geq 0} D(a)(n+1)z^n = \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a(k+1).$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a(k+1) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k a(k+1) z^k \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} z^{n-k} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k a(k+1) z^k (1-z)^{-k-1} \\ &= \frac{1}{1-z} \sum_{k \geq 0} (-1)^k a(k+1) \left(\frac{z}{1-z} \right)^k \\ &= \frac{1}{1-z} \sum_{k \geq 0} a(k+1) \left(\frac{z}{z-1} \right)^k \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n \geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} = \frac{z}{1-z} \sum_{k \geq 0} a(k+1) \left(\frac{z}{z-1} \right)^k$$

qui est la relation cherchée. □

Exemple 22. D'après les exemples 17 et 18 a), on a les relations suivantes :

a)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{H(n)}{n(n+1)} z^n = - \sum_{n \geq 1} \frac{H(n)}{n(n+1)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)^2} z^n - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n$$

b)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{H(n)}{n(n+2)} z^n - \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{(n+1)(n+2)} = - \sum_{n \geq 1} \frac{H(n)}{n(n+1)(n+2)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n.$$

c)

$$\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(H(n))^2}{n(n+1)} z^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{H^{(2)}(n)}{n(n+1)} z^n = - \sum_{n \geq 1} \frac{H^{(2)}(n)}{n(n+1)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n$$

Corollaire 9. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et tout entier naturel k , on a l'identité

$$\sum_{n \geq 1} \frac{D(a)(n)}{n^k} z^n = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} S^{(k)}(a)(n) \left(\frac{z}{z-1} \right)^n, \quad (28)$$

Démonstration. D'après (20), on a $\frac{1}{N^k} D(a) = D\left(\frac{1}{N} S^{(k)}(a)\right)$. La formule (28) résulte alors de (27). □

Exemple 23. a) En appliquant (28) avec $a = \frac{1}{N}$, on obtient pour $k \geq 1$,

$$\text{Li}_{k+1}(z) = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_k} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \quad (29)$$

avec (formellement)

$$\text{Li}_{k+1}(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{k+1}} z^n.$$

b) En appliquant (28) avec $a = \frac{1}{N^2}$, on obtient pour $k \geq 2$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{H(n)}{n^{k+1}} z^n = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1} n_k^2} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n. \quad (30)$$

c) En appliquant (28) avec $a = \frac{1}{2N-1}$, on obtient pour $k \geq 2$,

$$\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{n^{k+1}} z^n = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1} (2n_k - 1)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n. \quad (31)$$

d) En appliquant (28) avec $a = \frac{1}{(2N-1)^2}$, on obtient pour $k \geq 2$,

$$\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \frac{O(n)}{n^{k+1}} z^n = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1} (2n_k - 1)^2} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n. \quad (32)$$

5.2 Transformation d'Euler analytique

Théorème 6. Soit une suite $a \in \mathcal{E}^*$. Si la série $\sum_{n \geq 1} a(n) z^n$ est convergente dans le disque $\mathbf{D}(0, 1)$ alors la série $\sum_{n \geq 1} D(a)(n) z^n$ est convergente dans le disque ouvert $\mathbf{D}(0, \frac{1}{2})$ et on a pour tout $z \in \mathbf{D}(0, \frac{1}{2})$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D(a)(n) z^n = - \sum_{n=1}^{+\infty} a(n) \left(\frac{z}{z-1} \right)^n$$

L'application $z \mapsto \frac{z}{z-1}$ étant involutive, il en résulte que si la série $\sum_{n \geq 1} D(a)(n)z^n$ est convergente dans le disque $\mathbf{D}(0, 1)$ alors la série $\sum_{n \geq 1} a(n)z^n$ est convergente dans le disque ouvert $\mathbf{D}(0, \frac{1}{2})$ et on a pour tout $z \in \mathbf{D}(0, \frac{1}{2})$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a(n)z^n = - \sum_{n=1}^{+\infty} D(a)(n) \left(\frac{z}{z-1}\right)^n$$

Démonstration. Pour $z \in \mathbf{D}(0, 1)$, posons $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n+1)z^n$. On a pour tout $0 < r < 1$ et pour tout entier $k \geq 0$

$$a(k+1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}(0,r)} \frac{A(u)}{u^{k+1}} du$$

où $\mathbf{C}(0, r)$ est le cercle paramétré par $t \mapsto re^{it}$, avec $t \in [0, 2\pi]$. On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$D(a)(n+1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}(0,r)} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^n \frac{A(u)}{u} du.$$

On va montrer que

$$\sum_{n \geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}(0,r)} \sum_{n \geq 0} \left(z\left(1 - \frac{1}{u}\right)\right)^n A(u) \frac{z}{u} du.$$

Pour cela il suffit que la série $\sum_{n \geq 0} \left(z\left(1 - \frac{1}{u}\right)\right)^n A(u) \frac{z}{u}$ soit normalement convergente sur le cercle $\mathbf{C}(0, r)$, ce qui est le cas si

$$|z| < \left| \frac{u}{u-1} \right|.$$

Or si $u \in \mathbf{C}(0, r)$, on a $\frac{u}{u-1} \in \mathbf{C}\left(\frac{r^2}{r^2-1}, \frac{r}{1-r^2}\right)$, donc $\left| \frac{u}{u-1} \right| \leq \frac{r}{r+1}$. On en déduit que si $|z| < \frac{r}{r+1}$ alors on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}(0,r)} \sum_{n \geq 0} \left(z\left(1 - \frac{1}{u}\right)\right)^n A(u) \frac{z}{u} du \\ &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}(0,r)} \frac{z}{uz - z - u} A(u) du. \end{aligned}$$

Comme $0 < r < 1$, ceci prouve que la série $\sum_{n \geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1}$ est convergente dans le disque $\mathbf{D}(0, \frac{1}{2})$. D'autre part,

$$\frac{z}{uz - z - u} A(u) = \frac{z}{z-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{u} \frac{z}{z-1}} \frac{A(u)}{u} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{z-1}\right)^{n+1} \frac{A(u)}{u^{n+1}}.$$

Cette dernière série converge normalement sur $C(0, r)$ si

$$\left| \frac{z}{z-1} \right| < |u| = r$$

ce qui est le cas si $z \in \mathbf{D}\left(\frac{r^2}{r^2-1}, \frac{r}{1-r^2}\right)$.

En conclusion, si $z \in \mathbf{D}\left(\frac{r^2}{r^2-1}, \frac{r}{1-r^2}\right) \cap \mathbf{D}\left(0, \frac{r}{r+1}\right) = \mathbf{D}\left(0, \frac{r}{r+1}\right)$, alors on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{z-1}\right)^{n+1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}(0,r)} \frac{A(u)}{u^{n+1}} du \\ &= - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{z-1}\right)^{n+1} a(n+1). \end{aligned}$$

Comme $0 < r < 1$, ceci prouve qu'on a l'égalité dans le disque $\mathbf{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. \square

Par le Lemme d'Abel sur les séries entières, on en déduit du théorème précédent le corollaire suivant.

Corollaire 10. 1) Si les séries $\sum_{n \geq 1} a(n)(-1)^n$ et $\sum_{n \geq 1} D(a)(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergent, alors on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D(a)(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a(n).$$

2) Si les séries $\sum_{n \geq 1} D(a)(n)(-1)^n$ et $\sum_{n \geq 1} a(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergent, alors on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} D(a)(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exemple 24. a) D'après l'exemple 22 a), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(n)}{2^n n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} H(n)}{n(n+1)} = 2\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Li}_2(-1) = \frac{1}{2}\zeta(2) - \log^2(2) \quad (\text{cf. [1]}).$$

b) Pour $a = \frac{1}{2N-1}$, on a $D(a) = \frac{1}{N} \frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}$, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n \binom{2n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4},$$

et aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{n \binom{2n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (2n-1)} = \frac{\log(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}.$$

c) Pour $a = \frac{1}{(2N-1)^2}$, on a $D(a) = \frac{1}{N} \frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}} O$, d'où

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} = G.$$

On retrouve ainsi la formule de Ramanujan pour la constante de Catalan (cf. [1], p. 293).

Corollaire 11. Si la série $\sum_{n \geq 1} a(n)z^n$ est convergente dans le disque $\mathbf{D}(0, 1)$, alors on a pour tout $z \in \mathbf{D}(0, \frac{1}{2})$ et pour $k \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(a)(n)}{n^k} z^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} S^{(k)}(a)(n) \left(\frac{z}{z-1}\right)^n. \quad (33)$$

En particulier, pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(a)(n)}{n} z^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} S(a)(n) \left(\frac{z}{z-1}\right)^n. \quad (34)$$

De plus, si les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(a)(n)}{n^k} \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} S^{(k)}(a)(n) (-1)^n$ convergent, alors on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(a)(n)}{2^n n^k}. \quad (35)$$

Démonstration. Si la série $\sum_{n \geq 1} a(n)z^n$ converge dans le disque $\mathbf{D}(0, 1)$, alors il en est de même de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} S^{(k)}(a)(n) z^n$. Cela résulte de la relation de récurrence (cf. (23)) :

$$\frac{1}{N} S^{(k+1)}(a) = \frac{1}{N} S\left(\frac{1}{N} S^{(k)}(a)\right),$$

et du fait que si une série $\sum_{n \geq 1} b(n)z^n$ converge dans le disque $\mathbf{D}(0, 1)$, alors il en est de même de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} S(b)(n) z^n$. On peut alors appliquer le Théorème 6 car $D\left(\frac{1}{N} S^{(k)}(a)\right) = \frac{1}{N^k} D(a)$. \square

Exemple 25. a) Pour $a = \frac{1}{N}$, on a $D(a) = a$, d'où pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{H(n)}{n} = \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \zeta(2) - \frac{1}{2} \log^2(2) \quad (\text{cf. [1]}),$$

et pour $k = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=1}^n \frac{H(m)}{m} = \text{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} (\log 2)^3 - \frac{1}{2} \zeta(2) \log 2 + \frac{7}{8} \zeta(3) \quad (\text{cf. [1]}).$$

b) Pour $a = \frac{1}{N^2}$, on a $D(a) = \frac{1}{N}H$, d'où pour $k = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(n)}{2^n n} = -\text{Li}_2(-1) = \frac{1}{2}\zeta(2),$$

pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{H^{(2)}(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(n)}{2^n n^2} = \zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2) \log 2 \quad (\text{cf. [1]}),$$

et pour $k = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=1}^n \frac{H^{(2)}(m)}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(n)}{2^n n^3}.$$

c) Pour $a = \frac{1}{2N-1}$, on a $D(a) = \frac{1}{N} \frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}$, d'où pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{O(n)}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{16} \quad (\text{cf. [7]}),$$

pour $k = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=1}^n \frac{O(m)}{m} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3 \binom{2n}{n}},$$

pour $k = 2$ et $z = -\frac{1}{4}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 5^{n-1}} \sum_{m=1}^n \frac{O(m)}{m} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} = \zeta(3) \quad (\text{cf. [1], [7]}).$$

d) Pour $a = \frac{1}{(2N-1)^2}$, on a $D(a) = \frac{1}{N} \frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}} O$, d'où pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} O^{(2)}(n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O(n)}{n^2},$$

pour $k = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=1}^n \frac{O^{(2)}(m)}{m} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O(n)}{n^3}$$

pour $k = 2$ et $z = -\frac{1}{4}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 5^{n-1}} \sum_{m=1}^n \frac{O^{(2)}(m)}{m} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} O(n).$$

Références

- [1] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks Part I*, Springer Verlag, New York, 1985.
- [2] K. Boyadzhiev, Harmonic number identities via Euler's transform, *Journal of Integer Sequences*, **12** (2009), Article 09.6.1.
- [3] B. Candelpergher, M.-A. Coppo, *A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values*, hal-00495767, to appear.
- [4] P. Flajolet and R. Sedgewick, Mellin Transforms and Asymptotics : Finite differences and Rice's integrals, *Theoretical Computer Science*, **144** (1995), 101-124.
- [5] G. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, Clarendon Press, 1973.
- [6] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [7] D. H. Lehmer, Interesting series involving the central binomial coefficient, *Amer. Math. Monthly*, **92** (1985), 449-457.
- [8] D. Loeb, G.-C. Rota, Formal power series of logarithmic type, *Advances in Math.*, **75** (1989)
- [9] S. Roman, The logarithmic binomial formula, *Amer. Math. Monthly*, **99** (1992), 641-648.
- [10] Z.-H. Sun, Invariant sequences under binomial transformation, *Fibonacci Quart.*, **39** (2001), 324-333.